

**2<sup>o</sup> Teste**  
**Versão A**

24 de Maio de 2013: 17H30

Duração do teste: 1H30

Mestrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores (MEEC)

**Electromagnetismo e Óptica**

2<sup>o</sup> semestre de 2012-13

Prof. Fernando Barão (Responsável)

Prof. Amaro Rica da Silva

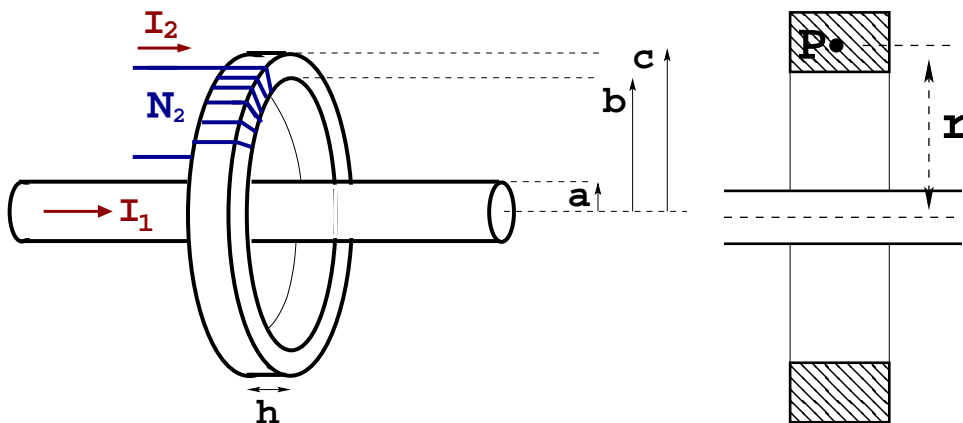
Ass. Frederico Francisco

Ass. Rafael Henriques

Avisos:

- Durante a realização do teste/exame não é permitido o uso de telemóveis e calculadoras.
- Identifique qual a versão do teste que está a realizar.
- Identifique claramente todas as folhas do teste/exame.
- Inicie a resolução de cada um dos grupo numa nova página.
- Realize sempre em primeiro lugar os cálculos analíticos e só no final substitua pelos valores numéricos.

**Problema 1:** Um condutor rectilíneo muito longo (aproximação do fio infinito) de raio  $a$  transporta uma corrente eléctrica estacionária  $I_1$ . Em volta do condutor existe um anel de raios  $b$  e  $c$  e espessura  $h$ , feito de material ferromagnético de permeabilidade magnética  $\mu$  ( $\mu \gg \mu_0$ ), em torno do qual existe um enrolamento de  $N_2$  espiras percorrida por uma corrente estacionária  $I_2$ . Determine:



- [1.0] a) os campos magnéticos  $\vec{H}_1(r)$  e  $\vec{B}_1(r)$  produzidos pelo condutor num ponto  $P$  à distância  $r$  do eixo do condutor, no interior do anel ferromagnético ( $b < r < c$ ).
- [1.0] b) o campo magnético  $\vec{B}_2(r)$  produzido pelo enrolamento num ponto  $P$  à distância  $r$  do eixo do condutor, no interior do anel ferromagnético ( $b < r < c$ ).
- [0.5] c) o coeficiente de auto-indução ( $L_2$ ) do enrolamento.  
*Note que o campo magnético depende de  $r$  no interior do anel.*
- [0,5] d) o coeficiente de indução-mútua  $M$  do sistema condutor-enrolamento.

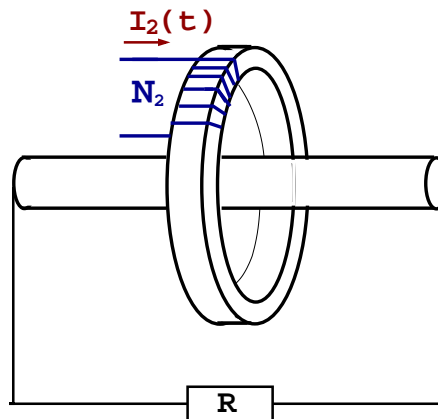
[1.0] e) a densidade de corrente de magnetização na superfície interior do anel ferromagnético ( $r = b$ ).

Admita agora que usa o mesmo sistema condutor-anel ferromagnético para gerar uma corrente eléctrica num circuito formado pelo condutor ligado a uma resistência eléctrica  $R$ , ligando-se para isso, um gerador de corrente variável ao enrolamento,  $I_2(t) = I_0 \sin(\omega t)$ . Determine, admitindo mais uma vez que a auto-indução do condutor (ou do circuito) é desprezável:

[0.5] f) o fluxo do campo magnético que atravessa o circuito.

[0.5] g) a corrente induzida no circuito.

[0.5] h) a potência fornecida ao circuito em cada instante.



**Problema 2:** Uma onda electromagnética plana, monocromática, de amplitude  $E_0 = 100 \frac{V}{m}$  e frequência  $f = 300 \text{ MHz}$  propaga-se na direcção do eixo dos  $zz$  num meio dieléctrico com índice de refração  $n = 1.5$  e permeabilidade magnética  $\mu = \mu_0$ . Sabendo que a onda se encontra polarizada linearmente segundo a direcção  $\vec{a} = \vec{e}_x + \vec{e}_y$ , determine:

[1.0] a) a velocidade de fase  $v$  da onda, o seu comprimento de onda  $\lambda$  e o vector número de ondas  $\vec{k}$ .

[1.0] b) a expressão para os campos eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e magnético  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  em função de  $k$  e  $\omega$ .

[1.0] c) o vector de Poynting  $\vec{S}$  e a intensidade  $\mathcal{I} = \langle |\vec{S}| \rangle$  da onda.

Admita agora que a onda electromagnética incide numa superfície plana de separação com o ar. Determine:

[0.5] d) o ângulo de reflexão total, isto é, o ângulo para o qual não existe uma onda transmitida.

[0.5] e) o ângulo de transmissão  $\theta_t$ , sabendo que a normal à superfície de separação é dada pela expressão

$$\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{8}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_z$$

[0.5] f) Diga, justificando em que condições é possível eliminar a onda reflectida. Determine a normal  $\vec{n}_{\theta_B}$  ao plano de separação, nessas condições.

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$   
 $\nabla \times \vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho_{liv} dv$   
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS = - \int_V \rho_{pol} dv$   
 $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$   
 $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}$
- $\phi_P = \int_P^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$   
 $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}$   
 $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_E) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[ \frac{1}{2} \right] \sum_i q_i \phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$   
 $U_E = \int_V u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_E}{ds} \vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
- $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$
- $\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dv$   
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E} \times \frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_{\Gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \vec{u}_r}{r^2}$   
 $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ H/m}$
- $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$
- $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$   
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$   
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$   
 $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_M \cdot \vec{n} dS$   
 $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$   
 $\vec{J}'_M = \vec{M} \times \vec{n}_{ext}$

Interação de partículas e campos

- $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Campos variáveis e indução

- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$   
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$
- $U_M = \left[ \frac{1}{2} \right] \sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$   
 $U_M = \int_V u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_M}{ds} \vec{u}_s$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$   
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Óptica

- $n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$
- $\text{tg}\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$   
interferência entre fendas
- $d \text{sen}\theta_{max} = m\lambda$
- $d \text{sen}\theta_{min} = m\lambda + \frac{\lambda}{m'}$  ( $m' \leq N$  e par)  
difracção
- $a \text{sen}\theta_{min} = m\lambda$

**Algumas Primitivas**

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = \frac{1}{b} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + b}} = \sqrt{x^2 + b}$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{x+a}\right)$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + b})$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: <http://integrals.wolfram.com>

**Coordenadas cartesianas (x, y, z)**

$$d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$dS = dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z)$$

**Coordenadas polares (r, θ)**

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$dS = r dr d\theta$$

**Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)**

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$dV = r dr d\theta dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left( \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

**Coordenadas esféricas (r, θ, φ)**

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{u}_\phi$$

$$dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\vec{\nabla} F = \left( \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left[ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \phi} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\phi$$

**Teorema da Divergência**

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

**Teorema da Stokes**

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

**Identidades vectoriais**

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$