Aulas de Problemas

Electromagnetismo e Óptica

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e Computadores (MEEC)

F. Barão, L. F. Mendes, A. R. Silva
Departamento de Física do Instituto Superior Técnico
Versão: Fev/2012

*Constantes Físicas

massa do electrão	m_e	$9,10 \times 10^{-31}$ kg
massa do protão	m_p	$1,67 \times 10^{-27}$ kg
carga elementar	e	$1,6 \times 10^{-19}$ C
permitividade eléctrica do vácuo	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	9×10^{9} N.m^{2}.C^{-2}
permitividade magnética do vácuo	$\frac{\mu_0}{4\pi}$	10^{-7} N.A^{-2}
constante de Planck	h	$6,6 \times 10^{-34}$ J.s
número de Avogadro	N_A	$6,022 \times 10^{23}$
velocidade da luz no vácuo	c	3×10^{8} m.s^{-1}

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 N.m^2.C^{-2}$
- $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$
  $\nabla \times \vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS = \int_V \rho_{liv}\, dv$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P}\cdot\vec{n}\, dS = -\int_V \rho_{pol} dv$
  $\rho_{pol} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$
  $\sigma_{pol} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{ext}$
- $\phi_P = \int_P^{Ref} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$
  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E}$
  $\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi_E)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[\frac{1}{2}\right]\sum_i q_i\ \phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$
  $U_E = \int_V u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm\frac{dU_E}{ds}\vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c\vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS$
- $p = \vec{J}\cdot\vec{E}$
- $\oint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dv$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E}\times\frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \left\langle \vec{S}\cdot\vec{n}\right\rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_\Gamma \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\vec{u}_r}{r^2}$
  $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} H/m$
- $d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}$
- $\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS = 0$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
- $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M}+\vec{H})$
  $\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$
- $\oint_\Gamma \vec{M}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_M\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{J}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M}$
  $\vec{J}'_M = \vec{M}\times\vec{n}_{ext}$

Interacção de partículas e campos

- $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Campos variáveis e indução

- $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij}I_j$
- $U_M = \left[\frac{1}{2}\right]\sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$
  $U_M = \int_V u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm\frac{dU_M}{ds}\vec{u}_s$
- $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Óptica

- $n_1 sen\theta_1 = n_2 sen\theta_2$
- $tg\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$

  interferência entre fendas
- $d sen\theta_{max} = m\lambda$
- $d sen\theta_{min} = m\lambda + \frac{\lambda}{m'}$ ($m' \leq N$ e par)

  difracção
- $a sen\theta_{min} = m\lambda$

Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{(x^2+b)^{3/2}} = \frac{1}{b}\frac{x}{\sqrt{x^2+b}} \qquad \int \frac{xdx}{(x^2+b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+b}} = \sqrt{x^2+b} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+b}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a}\ln(\frac{x}{x+a})$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: http://integrals.wolfram.com

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$d\vec{\ell} = dx\ \vec{u}_x \ + \ dy\ \vec{u}_y + \ dz\ \vec{u}_z$$
$$dS = dx\ dy$$
$$dV = dx\ dy\ dz$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z},\right) \times (A_x, A_y, A_z)$$

Coordenadas polares (r, θ)

$$d\vec{\ell} = dr\ \vec{u}_r + r\ d\theta\ \vec{u}_\theta$$
$$dS = r\ dr\ d\theta$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$d\vec{\ell} = dr\ \vec{u}_r + r\ d\theta\ \vec{u}_\theta + dz\ \vec{u}_z$$
$$dV = r\ dr\ d\theta\ dz$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\ A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\ A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$d\vec{\ell} = dr\ \vec{u}_r + r\ d\theta\ \vec{u}_\theta + r\ sen\theta\ d\phi\ \vec{u}_\phi$$
$$dV = r^2\ dr\ sen\theta\ d\theta\ d\phi$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(sen\theta A_\theta) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi)$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left[\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial (sen\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial (sen\theta A_\theta)}{\partial \phi}\right]\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r}\right]\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\vec{u}_\phi$$

Teorema da Divergência

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\ dV = \oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\ dS$$

Teorema da Stokes

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{A}\ dS = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$$

Identidades vectoriais

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

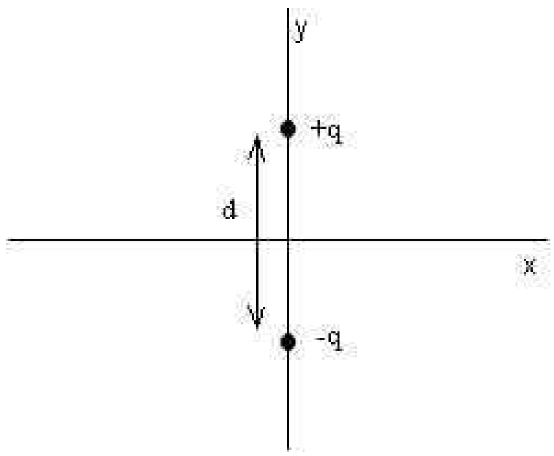
$1^{\underline{a}}$ série de problemas

Exercício 1 : Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F} = F_0\, \vec{u}_x$ ao longo da trajectória que é um arco de circunferência de raio R que liga os pontos $A = (0, R)$ e $B = (R, 0)$.

Exercício 2 : Calcule a área de uma superfície esférica de raio R

Exercício 3 : Calcule o volume de um cilindro de raio R e altura h

Exercício 4 : Um dipolo eléctrico é definido por um conjunto de duas cargas eléctricas simétricas ($+q$ e $-q$) separadas de uma distância d.



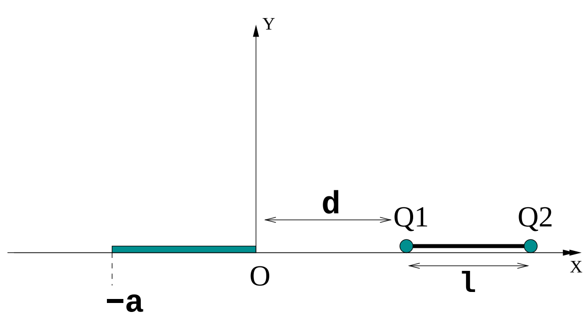
a) Determine a expressão do campo eléctrico criado pelas duas cargas em qualquer ponto do espaço.

b) Particularize a expressão obtida na alínea a) para os pontos situados ao longo do eixo xx e do eixo yy e obtenha as expressões válidas para $x, y >> d$.

c) Sabendo que o momento dipolar eléctrico de uma distribuição de N cargas q_i é definido por $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i q_i$, sendo $\vec{r}_i$ o vector posição da carga q_i, calcule o momento dipolar eléctrico e escreva as equações obtidas na alínea b) em função de $\vec{p}$.

d) Esboce as linhas do campo eléctrico e as equipotenciais.

Exercício 5 : Uma barra carregada de comprimento $a = 3$ cm e densidade linear de carga $\lambda = 2$ C/m é colocada alinhada com o eixo xx. A uma distância $d = 4$ cm e ao longo do mesmo eixo, é colocada uma barra isolante de comprimento $\ell = 2$ cm com duas cargas pontuais Q_1 e Q_2 nas extremidades.

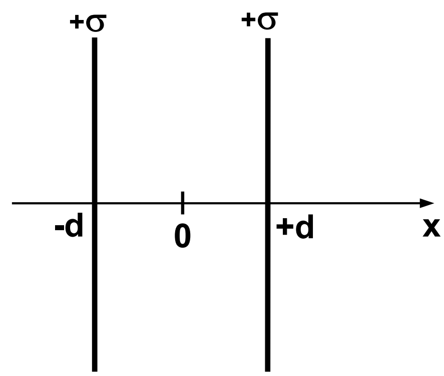


a) Determine o campo eléctrico produzido pela barra na posição onde se encontra a carga $\boldsymbol{Q_1}$.

b) Sabendo que $\boldsymbol{Q_2 = 1}$ μC, determine o valor de $\boldsymbol{Q_1}$ que permite à barra isolante permanecer imóvel.

c) O movimento da barra isolante poderia ser estudado considerando todas as forças aplicadas no seu centro de massa e toda a massa do sistema aí concentrada. Atendendo ao resultado da alínea anterior, indique justificando se faz sentido definir um *centro de cargas*.

Exercício 6 : Considere o sistema representado na figura, constituído por duas placas de espessura desprezável e tamanho *infinito*, colocadas nas posições $+d$ e $-d$ do eixo XX. Ambas as placas estão uniformemente carregadas com uma densidade de carga positiva $+\sigma$.



a) Determine a expressão do campo eléctrico, $\vec{E}_{(+d)}$, criado em todo o espaço pela placa colocada na posição $x = +d$.

b) Determine a expressção do campo eléctrico criado pelo conjunto das duas placas em todo o espaço, $\vec{E}$.

c) Tomando como ponto de referência a origem do referencial ($x = 0$), determine a expressão do potencial eléctrico criado pelas duas placas nas diferentes regimes do espaço.

Exercício 7 : O átomo de hidrogénio, electricamente neutro, é constituído por um protão de carga $+e$ e uma nuvem electrónica com simetria esférica em torno do protão. O potencial electrostático do átomo de hidrogénio no estado fundamental, num ponto qualquer à distância r do centro do átomo, é dado por,

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\exp(-br)}{r}$$

a) Determine o campo eléctrico existente num ponto P à distância R do centro do átomo.

b) Determine a carga Q contida numa esfera de raio R.
Sugestão: Utilize a lei de Gauss que se traduz na expressão, $Q = \varepsilon_0 \Phi_E(R)$, onde $\Phi_E(R)$ é o fluxo do campo eléctrico que atravessa a superfície esférica de raio R.

c) Determine a densidade de carga eléctrica da **nuvem electrónica** $\rho(r)$.

d) Verifique que o átomo é electricamente neutro.

$4^{\underline{a}}$ série de problemas

Exercício 8 : Um cabo coaxial de comprimento muito grande quando comparado com a sua espessura (infinito), é constituído por um condutor cilíndrico de raio a e por uma coroa cilíndrica condutora, de raios interno e externo respectivamente b e c ($c > b > a$). O cabo foi ligado a uma bateria que carregou o cabo interior com uma densidade de carga λ ($C.m^{-1}$).

a) Determine o campo eléctrico nas várias regiões do espaço. Esboce o gráfico de $E(r)$.

b) Calcule a diferença de potencial entre os condutores e desenhe as linhas equipotenciais.

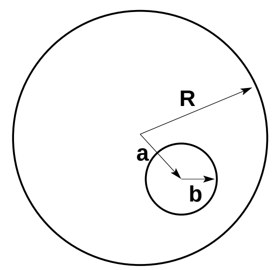
Exercício 9 : Uma esfera de raio R encontra-se carregada uniformemente com uma densidade de carga ρ. Determine:

a) o campo eléctrico num ponto P interior à esfera a uma distância r.

b) o potencial eléctrico no ponto P, tendo em conta que $\Phi(r = R) = 0$.

Admita agora que uma cavidade esférica de raio b é realizada na esfera, a uma distância a à origem.

c) Determine o campo eléctrico no interior da cavidade esférica.



Exercício 10 : A permitividade eléctrica de um meio infinito depende da distância radial (r) a um centro de simetria segundo a expressão $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + a/r)$ com $a > 0$. Uma esfera condutora de raio R e carga Q é colocada naquele meio e centrada em $r = 0$. Determine:

a) o campo eléctrico em função de r;

b) o potencial eléctrico em função de r;

c) o vector de polarização, $\vec{P}$, em função de r;

d) a densidade volumétrica de carga de polarização existente no dieléctrico;

e) a densidade de carga superficial de polarização no dieléctrico;

f) a carga total de polarização existente no dieléctrico.

Exercício 11 : Considere duas esferas condutoras de raios R_A e R_B e relativamente afastadas uma da outra pelo que a influência recíproca dos campos pode ser desprezada. Cada uma das esferas tem uma carga Q.

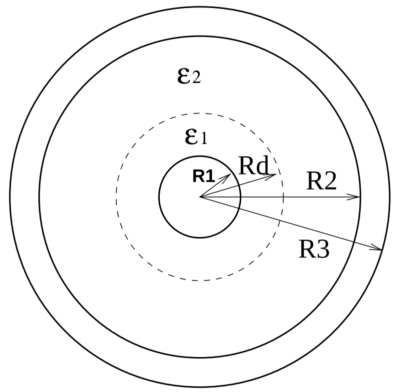
a) Diga como está distribuída a carga nas esferas condutoras e calcule a sua densidade em função de Q e dos seus raios.

b) Calcule o campo eléctrico junto à superfície das duas esferas em função de Q e dos seus raios.

c) Suponha que se ligavam as esferas através de um fio condutor. Calcule a carga que existiria em cada esfera após se atingir a situação de equilíbrio, Q_A e Q_B, em função de Q e dos seus raios.

$6^{\underline{a}}$ série de problemas

Exercício 12 : Um condensador esférico é constituído por um condutor de raio $\boldsymbol{R_1}$ e uma cavidade esférica condutora de raio interno $\boldsymbol{R_2}$ e externo $\boldsymbol{R_3}$. O espaço entre as armaduras metálicas está preenchido por dois dieléctricos de permitividade ε_1 e ε_2 ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$), cuja superfície esférica de separação possui raio $\boldsymbol{R_d}$. Suponha que a armadura interna do condensador foi carregada inicialmente com uma carga +Q.



a) Determine o campo eléctrico existente em todas as regiões do espaço e esboce num gráfico a sua magnitude em função de r.

b) Determine o potencial eléctrico existente nas várias regiões e faça a sua representação gráfica.

c) Determine a capacidade do condensador.

d) Calcule o vector polarização nas várias regiões.

e) Identifique as regiões onde existe carga de polarização e determine as densidades de carga de polarização.

Exercício 13 : Os iões no interior e no exterior de um neurónio estão separados por uma membrana plana de 10^{-8} m de espessura, que se comporta como um isolante com uma permitividade eléctrica $\varepsilon = 8\varepsilon_0$.

a) Qual é a capacidade de 1 cm^2 desse neurónio?

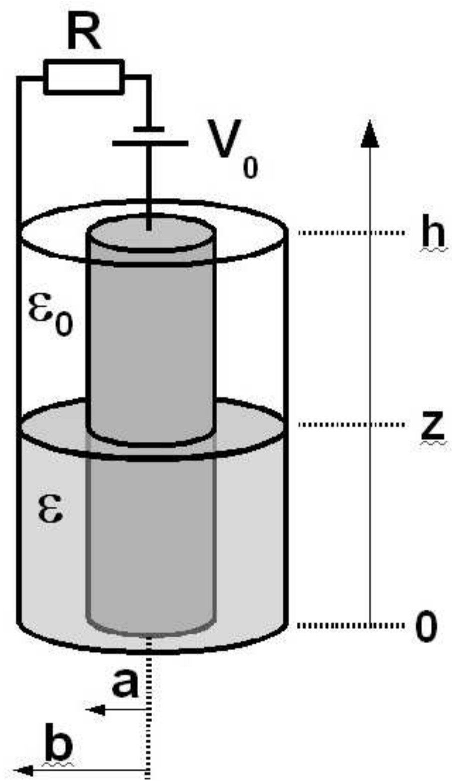
b) Qual a capacidade de 1 cm^2 de neurónio no caso de a membrana ter uma permitividade eléctrica igual à do ar.

c) Sabendo que o campo eléctrico devido aos iões que se acumulam à superfície da membrana neuronal é da ordem 10^6 N/C, calcule a diferença de potencial a que está sujeito o neurónio.

d) Determine a carga por unidade de superfície da membrana neuronal.

$7^{\underline{a}}$ série de problemas

Exercício 14 : A determinação do nível de um líquido dieléctrico pode ser feita recorrendo a um dispositivo formado por dois cilindros condutores de raios a e b e altura h, ligados a uma bateria de diferença de potencial V_0 em série com uma resistência R. O dispositivo, quando mergulhado no líquido, armazena uma dada carga eléctrica Q que é função da altura z deste. Desta forma, mediçõees da variação da carga eléctrica no dispositvo permitem conhecer a altura do líquido.



a) Determine, na situação em que o dispositivo cilíndrico se encontra preenchido por ar, o campo eléctrico entre as armaduras cilíndricas e a carga eléctrica, Q, armazenada no cilindro interior, em função de V_0.

Assuma agora que o dispositivo é mergulhado no líquido até uma altura z. Determine:

b.1) as cargas eléctricas Q_1 e Q_2 armazenadas, respectivamente, nas partes seca e molhada do cilindro interior.

b.2) a capacidade do dispositivo, $C(z)$.

b.3) a energia armazenada, $U(z)$.

b.4) a força segundo z, sentida pelo líquido dieléctrico no interior do cilindro.

Admita agora que o líquido possui uma condutividade eléctrica que o torna um razoável condutor de corrente eléctrica. Admita ainda que a fonte impôe uma tensão $V_0 = 10$ V, que a resistência R é de $10\ \Omega$ e que a resistência eléctrica do líquido é $R_L = 5\ \Omega$:

c.1) faça o desenho do circuito equivalente do sistema.

c.2) calcule, após se ter atingido o regime estacionário, a corrente no circuito e a tensão no condensador.

$8^{\underline{a}}$ série de problemas

Exercício 15 : Um cilindro oco de comprimento L e raios a e b é feito de material de condutividade eléctrica σ_c. É aplicada uma diferença de potencial V entre a superfície interna e externa do cilindro. Determine:

a) a resistência eléctrica do cilindro;

b) a potência dissipada pela resistência.

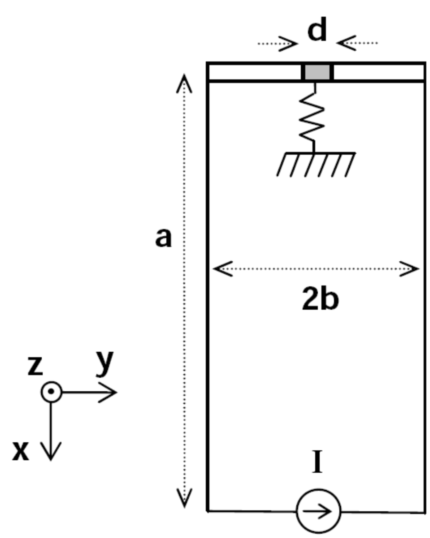
Exercício 16 : Num tubo de raios catódicos de uma televisão (CRT) existe a emissão de electrões por um cátodo aquecido que, depois de acelerados por um campo eléctrico, incidem num ecrã fosforescente. As especificações técnicas de um dado tubo indicam que existem $5,6 \times 10^{14}$ electrões que incidem no ecrã com uma energia cinética de 25 KeV em cada segundo. Determine:

a) a corrente eléctrica associada ao feixe de electrões;

b) o campo magnético produzido pelo feixe à distância de $1,5$ mm;
Considere a aproximação do fio infinito.

c) o campo eléctrico à distância de $1,5$ mm.
Considere a aproximação do fio infinito.

Exercício 17 : Um corta-circuitos de correntes industriais é formado por dois fios muito longos de comprimento a, ligados por uma barra metálica de comprimento $2b << a$, como se mostra na figura. A barra contém a meio uma parta móvel de comprimento $d << 2b$, que está ligada a um ponto fixo através de uma mola. Para deslocar a parte móvel e interromper o circuito é necessário exercer uma força $\vec{F} = -F\vec{u}_x$.



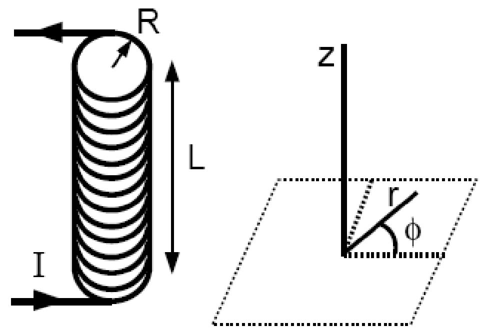
a) Determine a expressão do campo magnético, $\vec{B}$, no ponto médio da parte móvel da barra, em função da intensidade de corrente que circula no corta-circuitos, I. Despreze a contribuição do troço inferior do circuito.

b) Admitindo que o campo calculado em a) é aproximadamente constante na parte móvel da barra, obtenha a expressão para o valor da intensidade de corrente acima do qual o circuito é interrompido.

c) Utilizando qualitativamente os resultados das alíneas anteriores diga, justificando, qual a forma geométrica que tomaria um circuito constituído por um fio extremamente flexível, percorrido por uma corrente, na ausência de qualquer força exterior.

$9^{\underline{a}}$ série de problemas

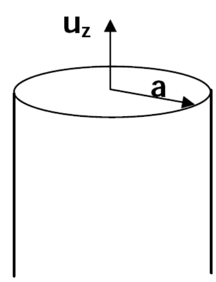
Exercício 18 : Uma bobine de raio R e altura $L >> R$ possui N espiras percorridas por uma corrente estacionária I. A bobine tem um núcleo de um material não homogéneo cuja permeabilidade é dada por $\mu = \mu_0(2 - \frac{r}{R})$, sendo r a distância ao eixo vertical da bobine. Considerando a aproximação da bobine infinita, determine:



a) as expressões do campo magnético, $\vec{B}$, e da magnetização, $\vec{M}$, no interior da bobine.

b) as correntes de magnetização no material, $\vec{J}_M$. Esboce os gráficos $M(r)$ e $J_M(r)$.

Exercício 19 : Um condutor cilíndrico muito comprido, de raio a e preenchido por um material de permeabilidade magnética μ_0, é percorrido por uma corrente eléctrica estacionária não uniforme cuja densidade de corrente é descrita por $\vec{J} = J_0 r \vec{u}_z$.

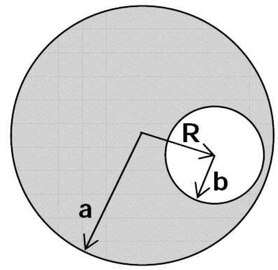


a) Determine a intensidade de corrente que atravessa a secção transversal do condutor.

b) Desenhe as linhas de campo magnético e obtenha a sua expressão para todo o espaço ($r < a$ e $r > a$). Faça um gráfico de $B(r)$.

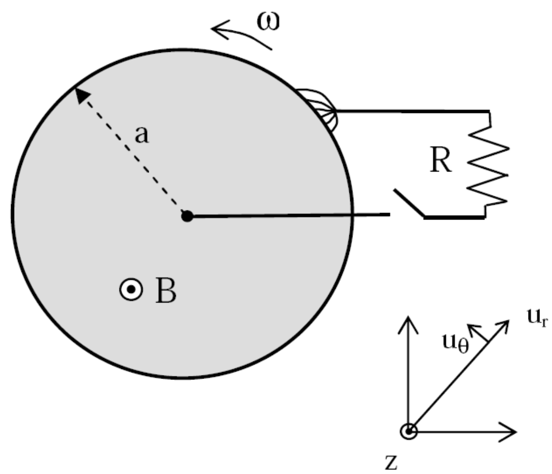
c) Sabendo que a corrente é mantida por uma fonte que aplica ao condutor uma diferença de potencial por unidade de comprimento V', determine a condutividade do cilindro, σ.

d) Imagine que se abria um orifício cilíndrico de raio b no interior do condutor central, a uma distância R do centro do condutor, tal como indicado na figura. Determine, explicando detalhadamente o seu raciocínio, o campo magnético B no centro do orifício.


R
b
a

$10^{\underline{a}}$ série de problemas

Exercício 20 : O primeiro gerador de corrente foi inventado por Faraday em 1831 e consiste num disco metálico que é posto a rodar na presença de um campo magnético perpendicular à sua superfície. Após se fechar um interruptor, o centro do disco e a sua periferia ficam ligados por um circuito imóvel que é percorrido por corrente. O disco,que possui raio $\boldsymbol{a}$ e espessura $\boldsymbol{b}$, é posto a rodar com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e encontra-se sujeito a um campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B_0}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{z}}$.



a) Determine a expressão da força a que ficam sujeitos os electrões livres do metal devido ao campo magnético,$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}}$.

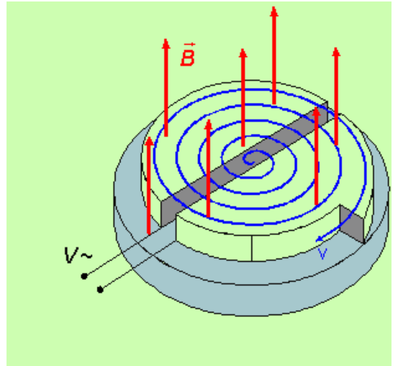
b) Determine a expressão do campo electrostático dentro do disco, devido à distribuição de carga do disco, após se ter atingido o equilíbrio electrostático, $\vec{\boldsymbol{E}}$.

c) Determine a densidade de carga no interior do disco e na sua superfície exterior, em equilíbrio electrostático.

d) Determine a diferença de potencial ($\boldsymbol{V}$) a que vai ficar sujeita a resistência $\boldsymbol{R}$ após se fechar o interruptor.

e) Determine a potência mecânica fornecida ao disco para o manter a rodar com velocidade angular constante, após se fechar o interruptor e a resistência $\boldsymbol{R}$ passar a ser percorrida por uma corrente.

Exercício 21 : Num ciclotrão (acelerador de partículas), partículas carregadas são sujeitas a um campo magnético $\boldsymbol{B}$ perpendicular à sua velocidade, sendo a sua trajectória circular. No entanto, num ciclotrão, ao fim de cada semi-volta, aplica-se às partículas uma tensão sinusoidal dada por $\boldsymbol{V(t) = V_0 sen(\omega t)}$. O campo eléctrico que deriva desta tensão aumenta a velocidade das partículas acelerando-as. Deste modo, a sua trajectória deixa de ser circular passando a consistir em troços semicirculares de raio cada vez maior. Neste exercício pretende-se *dimensionar* um ciclotrão que acelera partículas alfa (núcleos de átomos de hélio possuindo 2 protões e 2 neutrões).



a) Para que haja sincronia entre o efeito da aceleração do campo eléctrico e o movimento de rotação das partículas, qual deve ser a frequência da tensão sinusoidal em função do campo B, da carga q e da massa m das partículas.

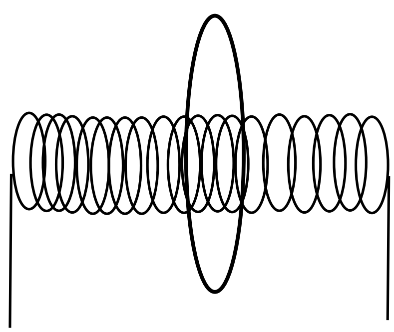
b) Suponha que a frequência da tensão sinusoidal $V(t) = V_0 sin(\omega t)$ é de $10\ KHz$. Qual deve ser então, de acordo com a alínea a), o valor do campo magnético aplicado?

c) As partículas não ganham energia devido à aplicação do campo magnético (é verdade ? porquê?), porém o campo eléctrico fornece-lhes energia. Qual é, em função da amplitude V_0 da tensão aplicada, a energia ganha em cada volta completa?

d) Suponha que o raio da órbita de extracção (raio da última volta) é $R = 1$m. Qual a energia cinética com que saem do ciclotrão as partículas alfa?

e) Suponha que as partículas percorrem 12 voltas no interior do ciclotrão. A partir das alíneas c) e d) calcule a diferença de potencial máxima V_0 que é aplicada às partículas alfa.

Exercício 22 : Um solenóide muito comprido com $2R = 20$ cm de diâmetro e $n = 1000$ espiras por metro é percorrido por uma corrente eléctrica I. Em torno do seu eixo vertical existe um anel de um material condutor com um diâmetro de $2R_a = 40$ cm.

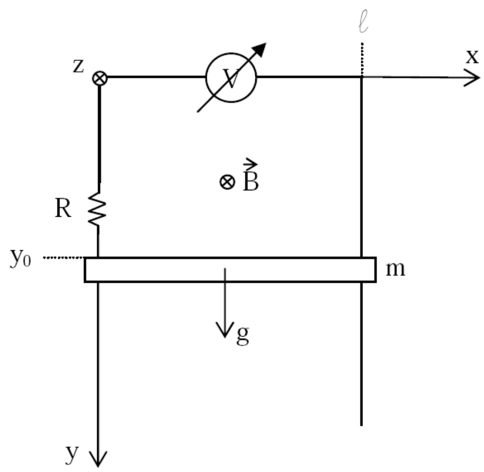


a) Calcule a força electromotriz induzida no anel quando a corrente no solenóide passa de $I_1 = 10$ A para $I_2 = 1$ A num intervalo de tempo $\Delta t = 0,1$ s.

b) Se o anel tiver 1 cm^2 de secção e uma condutividade eléctrica $\sigma_c = 6 \cdot 10^8\ \Omega^{-1}$m^{-1}, qual a corrente eléctrica que o percorre?

c) Qual a resposta à alínea b) se o anel tiver 1 m de diâmetro? É importante que os eixos estejam coincidentes?

Exercício 23 : Considere o circuito da figura, constituído por uma fonte de tensão variável V, uma resistência R e uma barra móvel de comprimento ℓ e de massa m. O circuito está colocado na vertical, estando a barra sujeita à aceleração da gravidade g. Perpendicularmente ao circuito existe um campo magnético uniforme de intensidade $\vec{B} = B\vec{u}_z$. No instante inicial a barra encontra-se na posição y_0.



a) Admita que a barra tem uma velocidade segundo y (para baixo) $\vec{v} = v_0\vec{u}_y$. Determine a intensidade e sentido da corrente que percorre o circuito.

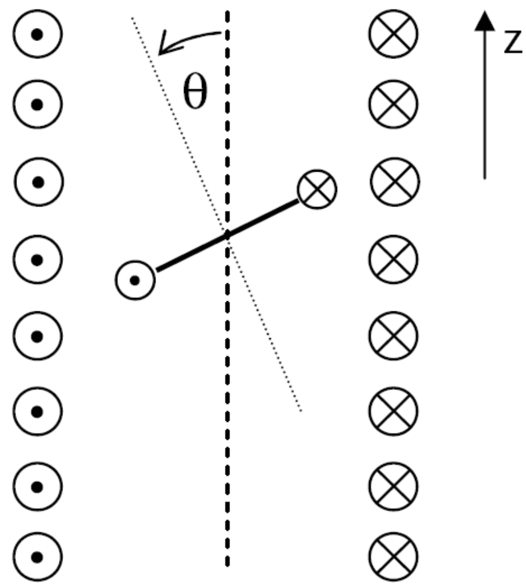
b) Admita que a barra é deixada cair sem velocidade inicial. Determine a tensão que terá de ser imposta pela fonte em cada instante, $V(t)$, para que não exista corrente no circuito (indique também a polaridade da fonte).

c) Admita que a barra é largada sem velocidade inicial. Determine a tensão que terá de ser imposta pela fonte, V, para que a barra fique suspensa sem cair (indique também a polaridade da fonte).

d) Admita agora que a barra é largada com uma velocidade inicial v_0. Se a tensão imposta ao circuito for semelhante à da alínea c) que tipo de movimento terá a barra? Justifique qualitativamente.

$11^{\underline{a}}$ série de problemas

Exercício 24 : Uma bobina de N espiras colocada na vertical, tem um comprimento ℓ e um raio a ($\ell >> a$) e é percorrida por uma corrente estacionária I_1. No seu interior é colocada uma espira de raio $b < a$ cujo eixo faz um ângulo θ com o eixo da bobina.



a) Determine o coeficiente de auto-indução (L) da bobina.

b) Determine o coeficiente de indução mútua (M) do sistema.

c) Admitindo que a auto-indução da espira é L_{esp}, determine a expressão da energia magnética do sistema quando a espira também é percorrida por uma corrente estacionária I_2 com o mesmo sentido de I_1.

d) Determine o momento da força que actua a espira. Identifique o ponto de equilíbrio estável. *Nota: Recorde que a derivada de uma energia em ordem a um ângulo não é uma força mas sim o momento de uma força.*

Exercício 25 : Considere uma bobina de comprimento ℓ e diâmetro D em que $\ell >> D$, com n espiras por unidade de comprimento e um núcleo de ar, possui uma resistência R. Em torno da bobina existe uma espira quadrada de lado a que é percorrida por uma corrente $I = I_0 cos(\omega t)$. Determine:

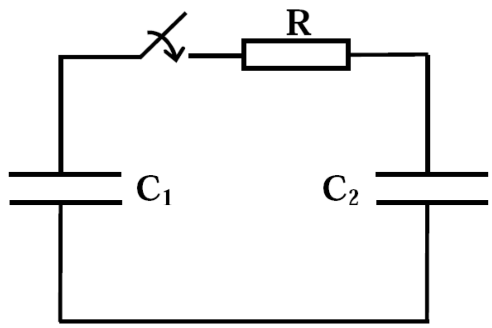
a) o coeficiente de auto indução da bobina.

b) o coeficiente de indução mútua entre a espira e o solenóide.

c) a expressão da equação diferencial que permite determinar a corrente induzida no solenóide.

$12^{\underline{a}}$ série de problemas

Exercício 26 : Considere o circuito da figura em que $C_1 = C_2 = 1\ \mu$F e $R = 100\ \Omega$. Inicialmente o interruptor encontra-se aberto, o condensador C_1 tem uma tensão de 10 V e o condensador C_2 está descarregado.



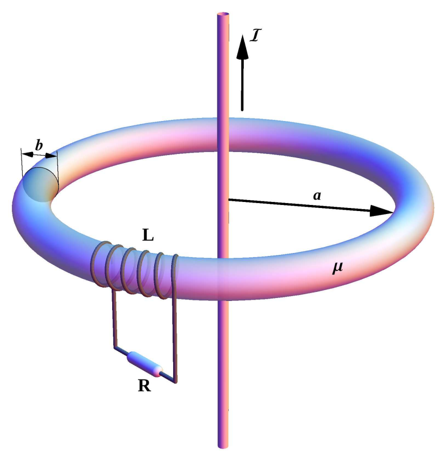
a) Calcule a carga e a energia inicial do condensador C_1.

b) Após se ter fechado o interruptor e se ter atingido o regime estacionário:

  b1) Calcule a tensão de cada condensador.

  b2) Calcule a energia dissipada na resistência.

Exercício 27 : Um fio rectilíneo colocado no espaço vazio, transporta uma corrente eléctrica estacionária $I_1 = I_0$. A envolver o fio e concêntrico com este, existe um anel de ferro de raio a, permeabilidade magnética μ e diâmetro b, em torno do qual existe um enrolamento com N espiras e coeficiente de auto-indução L Henry, que se encontra ligado a uma resistência eléctrica R. Determine:



a) o campo magnético $\vec{B}$ a uma distância r ($a < r < a+b$) no interior do anel.

b) o coeficiente de indução mútua M do sistema anel/enrolamento-fio, admitindo que $a >> b$.
Nota: admitindo que $a >> b$ significa que em boa aproximação se pode considerar o campo $\vec{B}$ constante no interior do anel de ferro.

c) a corrente eléctrica, I_2, que percorre o circuito RL.

d) a energia magnética armazenada pelo anel toroidal, admitindo que $a >> b$.

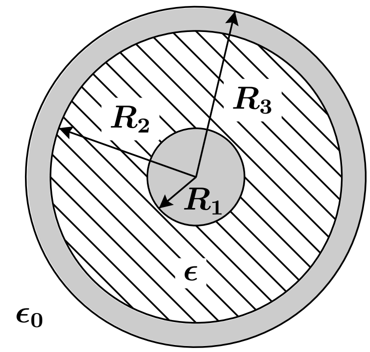
e) a corrente de magnetização existente à superfície do anel de ferro.

Admita agora que a corrente que atravessa o fio varia no tempo de acordo com a expressão $I_1 = I_0 e^{-kt}$.

f) Determine a equação diferencial que rege a corrente eléctrica I_2, existente no circuito RL.

$13^{\underline{a}}$ série de problemas

Exercício 28 : Considere dois **condutores esféricos**, concêntricos, com a geometria indicada na figura e colocados no vazio. O condutor interior tem uma carga eléctrica total $q_1 > 0$ enquanto que o condutor exterior tem uma carga eléctrica total $q_2 = 0$. O espaço entre os condutores está preenchido com um dieléctrico linear, homogéneo e isótropo de permitividade ϵ. Determine:



a) o vector $\vec{D}$ no espaço entre os condutores.

b) o campo eléctrico no exterior do sistema de condutores esféricos ($r > R_3$).

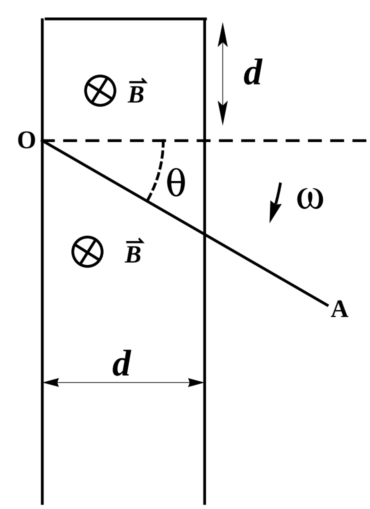
c) o potencial electrostático do condutor interior, considerando como referência $\phi(\infty) = 0$.

d) a energia electrostática armazenada na região entre os dois condutores.

e) a densidade de carga livre, σ_2, na superfície interior do condutor externo e a densidade de carga de polarização, σ'_2, na superfície exterior do dieléctrico ($r = R_2$). Relacione estas duas densidades de carga eléctrica com a discontinuidade da componente normal do vector $\vec{E}$ em $r = R_2$; isto é, mostre que se tem

$$E_n(R_2^+) - E_n(R_2^-) = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\sigma_2 + \sigma'_2\right)$$

Exercício 29 : Pretende-se construir um pequeno gerador eléctrico que converte energia mecânica em energia eléctrica. Para tal, constrói-se um circuito eléctrico constituído por um condutor em **U**, de resistividade desprezável, e fechado por uma haste condutora de forma cilíndrica, com uma secção de raio a e comprimento total $2d$. O circuito tem inicialmente a forma de um quadrado de lado d, e está sujeito a um campo magnético $\vec{B}$ perpendicular ao plano do circuito.



a) [1.0] Determine a resistência eléctrica circuito inicial correspondente à haste cilíndrica de comprimento d, sabendo que a condutividade eléctrica do material da haste é σ_c.

b) Admita agora que a haste é colocada em rotação em torno do ponto O com velocidade angular constante ω. Determine, considerando a situação em que o circuito se encontra fechado:

b.1) o fluxo do campo magnético que atravessa o circuito eléctrico, $\Phi_B(t)$.

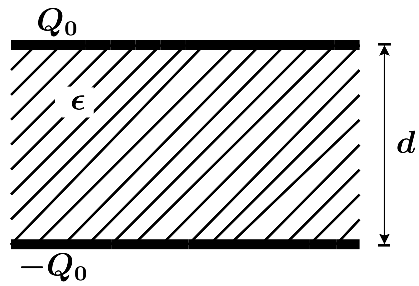
b.2) a resistência eléctrica do circuito, $R(t)$.

b.3) a corrente eléctrica induzida no circuito $I(t)$ e o seu sentido de circulação.

b.4) a força magnética total existente sobre a haste em rotação, $\vec{F}_B(t)$.

b.5) a força mecânica que seria necessária aplicar na extremidade da barra A, de forma a manter a velocidade angular ω constante.

Exercício 30 : Considere o condensador plano representado na figura. A área das placas condutoras é A e a distância entre elas é d ($d \ll \sqrt{A}$). O condensador está preenchido por um dieléctrico linear, homogéneo e isótropo de permitividade eléctrica ϵ. As placas do condensador estão carregadas com cargas elétricas $\pm Q_0$ ($Q_0 > 0$). Determine:



a) o vector $\vec{D}$ nas regiões dentro e fora do condensador na aproximação $d \ll \sqrt{A}$.

b) a diferença de potencial, V, entre as placas condutoras em função da carga eléctrica Q_0.

c) A densidade de carga de polarização, σ', junto à superfície da placa carregada negativamente.

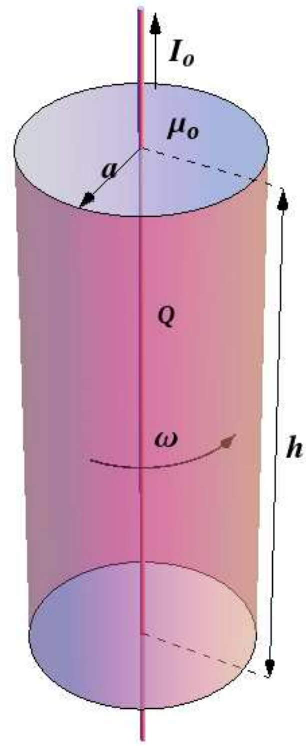
d) Admita agora na resolução das alíneas que se seguem, que o dieléctrico de permitividade ϵ não é perfeito (isto é, permite a passagem de corrente) e que tem uma condutividade eléctrica σ_c. Considere que no instante $t = 0$ a carga no condutor carregado positivamente é $Q(0) = Q_0$.

d.1) Mostre que a lei de variação da carga eléctrica existente na placa carregada positivamente, é ao longo do tempo: $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\sigma_c}{\epsilon}t}$.

d.2) Determine a energia total dissipada por efeito de Joule até o condensador estar completamente descarregado.

d.3) Dado que o resultado da alínea d.2) não depende da condutividade eléctrica σ_c, desde que $\sigma_c > 0$, explique então, justificando, qual o papel de σ_c.

Exercício 31 : Uma película cilíndrica oca isolante de altura h e raio a ($h >> a$) possui uma carga eléctrica $Q > 0$ espalhada uniformemente à superfície. A película cilíndrica, preenchida de ar, encontra-se a rodar com velocidade angular ω constante. Determine:



a) a densidade de corrente eléctrica superficial, $\vec{J}_s$ e a corrente eléctrica total, I, existentes em consequência da rotação do cilindro.

b) o campo magnético, $\vec{B}$, assumindo que este é uniforme, no interior do cilindro.

c) a força magnética existente sobre um condutor rectilíneo colocado no eixo do cilindro, percorrido por uma corrente estacionária I_0. *Nota: caso não tenha realizado a alínea b), considere o campo magnético* $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$

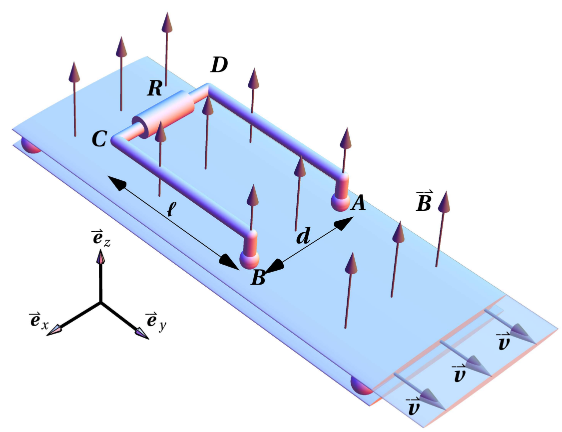
d) Admita agora que o cilindro passa a rodar com uma velocidade angular variável no tempo, $\omega(t) = \omega_0 t$ e que no seu interior é colocado um material ferromagnético de permeabilidade variável em função da distância ao eixo cilindro, $\mu(r) = \mu_0 e^{(1-\frac{r}{a})}$. Determine:

d.1) o campo magnético $\vec{B}(t)$ num ponto P a uma distância $r = \frac{a}{2}$ do eixo do cilindro.

d.2) a densidade de corrente de magnetização em volume, $\vec{J}_M$, existente no interior do material ferromagnético.

d.3) o campo eléctrico $\vec{E}$ existente no ponto P, descrito na alínea d.1).

Exercício 32 : Um circuito condutor de resistência R em forma de U, com comprimento ℓ e largura d, está imóvel e é terminado nas extremidades por contactos flutuantes A e B sobre uma correia condutora fina, também de largura d e resistividade desprezável, que se move paralelamente ao circuito no seu sentido longitudinal, com velocidade uniforme $\vec{v}$. Um campo magnético homogéneo $\vec{B}$ existe perpendicularmente à correia e ao plano do circuito. (Despreze a aparente diferença que aparece na imagem entre a largura da correia e distância entre os pontos A e B.)



a) Calcule a força por unidade de carga que é exercida sobre as cargas móveis da correia condutora em movimento, assumindo que $\vec{B}$ é constante no tempo.

b) Mostre esquematicamente onde é que estas cargas móveis se acumulam na correia. Determine o campo $\vec{E}$ gerado por essas cargas assumindo que se atinge um equilíbrio antes da correia chegar aos pontos A e B.

c) Qual é a tensão V_{AB} que deve existir então entre os contactos A e B .

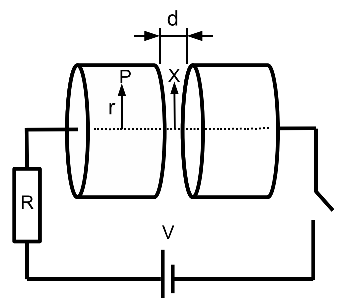
d) Faça um esquema dum circuito eléctrico equivalente nestas condições e determine a magnitude e direcção da corrente $\boldsymbol{I}$ induzida no condutor em $\boldsymbol{U}$. Determine a força magnética $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}}$ exercida sobre o circuito.

e) Mostre utilizando a lei de Faraday que a força electromotriz ε_{fem} induzida pelo campo magnético no circuito é igual à tensão calculada na alínea $\boldsymbol{b})$ pelo campo eléctrico de Hall.
Sugestão: Mostre que é irrelevante a escolha do trajecto na correia usado para fechar o circuito entre $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ por isso escolha o mais simples para determinar o fluxo de $\vec{\boldsymbol{B}}$ na Lei de Faraday.

f) Assumindo agora que o campo magnético varia harmonicamente em magnitude como $\boldsymbol{B(t) = B_o \cos(\omega t)}$, e que o circuito tem uma auto-indução $\boldsymbol{L}$ escreva a equação diferencial que descreve o circuito eléctrico equivalente.

$14^{\underline{a}}$ série de problemas

Exercício 33 : Um condutor ideal (de resistência nula) cilíndrico de raio a e secção **A**, está inserido num circuito que contém uma fonte de tensão **V** e uma resistência **R**. É feito um corte nesse condutor abrindo-se um espaço de largura **d**, muito menor que as restantes dimensões do condutor, de acordo com a figura.



a) Desenhe o circuito equivalente do sistema.

b) Determine as equações da corrente eléctrica que percorre o circuito quando se fecha o interruptor e da carga eléctrica existente nas faces do corte efectuado no condutor cilíndrico.

c) Escreva a expressão da densidade de corrente, **J**, no condutor cilíndrico.

d) Escreva a expressão do campo magnético num ponto **P** no interior do condutor cilíndrico, a uma distância **r** do seu eixo.

e) Determine a corrente de deslocamento existente na região do corte do condutor cilíndrico.

f) Escreva a expressão do campo magnético num ponto **X** no corte efectuado no condutor cilíndrico, a uma distância **r** do seu eixo.

g) Determine a potência instantânea que atravessa a superfície cilíndrica que delimita a área de corte do condutor cilíndrico.

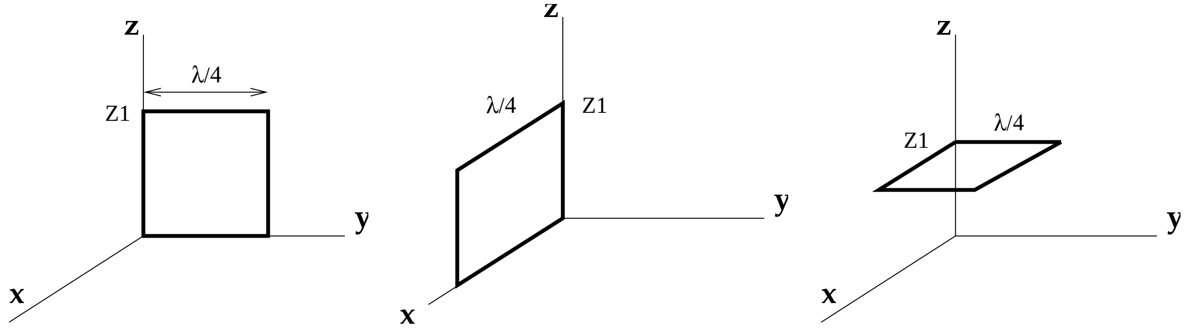
Exercício 34 : Uma onda electromagnética plana, monocromática e sinusoisal propaga-se no vácuo segundo o eixo dos zz e tem um comprimento de onda $\lambda = 500$ nm. O seu campo eléctrico encontra-se polarizado segundo o eixo xx. A amplitude do campo eléctrico é $1\ \mu$V.m^{-1}.

a) Escreva a expressão do campo eléctrico segundo as coordenadas x, y e z.

b) Calcule o campo magnético.

c) Calcule o vector de Poynting.

d) Colocaram-se 3 espiras quadradas de lado $\lambda/4$ nos planos xy, xz e yz, como indica a figura. Calcule a força electromotriz nas três espiras devido ao campo eléctrico, no instante em que o campo é máximo em $z = z_1$.



Exercício 35 : Uma onda electromagnética plana e monocromática propagase no ar e incide com um ângulo de $60°$ numa placa de cristal de área $A = 0,5$ m^2, sendo a placa totalmente iluminada pela onda. A densidade média da potência transportada pela onda é de $I = 10^{-4}\ \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ W.m^{-2} e o seu campo eléctrico é descrito por:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_x \vec{u}_x + E_z \vec{u}_z \\ E_x &= E_0 cos(\omega\ t - k\ y) \\ E_z &= E_0 sen(\omega\ t - k\ y) \end{aligned}$$

a) Qual a polarização da onda?

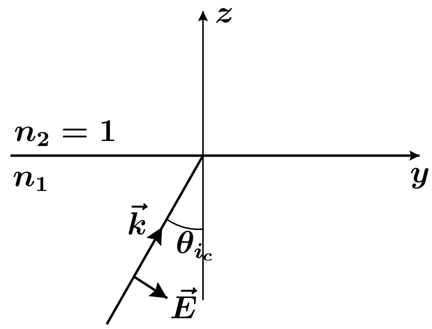
b) Quais as equações que descrevem o seu campo magnético $\vec{B}$?

c) Qual o valor de E_0?

d) Sabendo que 50% da potência transportada pela onda atravessa a placa, qual a energia que a atravessou ao fim de 1 hora?

$15^{\underline{a}}$ série de problemas

Exercício 36 : Considere uma onda plana monocromática que se propaga num meio não magnético, ($\mu_1 = \mu_0$), com permitividade $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$. Conforme indicado na figura, esta onda incide na superfície de separação ($z = 0$) do meio com o vazio com um ângulo de incidência igual ao ângulo crítico de reflexão total, isto é, $\theta_i = \theta_{i_c}$.



O campo $\vec{E}$ da onda é dado por

$$\begin{cases} E_x &= 0 \\ E_y &= \beta E_0 \sin\left[\omega t - |\vec{k}|\,(\alpha y + \beta z)\right] \\ E_z &= -\alpha E_0 \sin\left[\omega t - |\vec{k}|\,(\alpha y + \beta z)\right] \end{cases}$$

Determine:

a) o ângulo de incidência da onda, θ_{i_c}.

b) as constantes α e β e mostre que a onda é transversal.

c) a polarização da onda.

d) o campo $\vec{H}$ da onda.

e) o valor médio do vector de Poynting, $\left\langle |\vec{S}(t)| \right\rangle$.

f) Comente a seguinte afirmação no contexto da situação da figura:
Uma onda incide com um ângulo de incidência $\theta_i > \theta_{i_c}$ e com o campo $\vec{E}$ paralelo ao plano de incidência. Se escolhermos $\theta_i = \theta_{i_B}$ (onde θ_{i_B} é o ângulo de Brewster) então não teremos nem onda reflectida nem onda transmitida.

<u>*Formulário auxiliar:*</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r \\ \tan\theta_{i_B} = \frac{n_2}{n_1} \end{array}}$$

Exercício 37 : Considere uma onda electromagnética plana monocromática a propagar-se no vazio. O campo eléctrico $\vec{E}$ da onda é dado por:

$$\begin{cases} E_x &= E_0 \sin\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right] \\ E_y &= \alpha E_0 \sin\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right] \\ E_z &= 0 \end{cases}$$

Determine:

a) a direcção de propagação da onda.

b) o valor da constante α para que se trate duma onda plana monocromática.

c) a polarização da onda.

d) o campo $\vec{H}$ da onda.

e) o valor médio do vector de Poynting, $\left\langle |\vec{S}| \right\rangle$. Realize o cálculo numérico no final, tendo em conta que $E_0 = 3\sqrt{2\pi}\ V/m$.

f) Considere agora que a onda incide na superfície de separação **vazio**($y > 0$)—**vidro**($y < 0$), definida pelo plano $y = 0$. Escreva o **vector de onda**, $\vec{\kappa}_t$, para a onda transmitida ($n_{\text{vidro}} = 1.5$).