

Exame
Recuperação de um
dos Testes

11 de Janeiro, 2014 (11h30)

Duração dos testes: 1h30

Duração do exame: 3h00

Mestrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores (MEEC)
Electromagnetismo e Óptica
1º semestre de 2013-14

Docentes:

Prof. Fernando Barão (Responsável)

Prof. Filipe Mendes

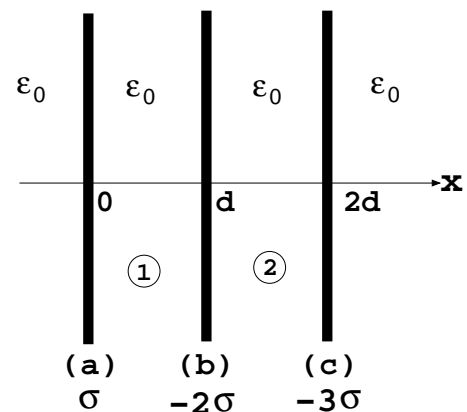
Prof. Ana Maria Martins

Avisos:

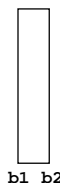
- Durante a realização do teste/exame não é permitido o uso de telemóveis e calculadoras.
- Identifique claramente todas as folhas do teste/exame.
- Inicie a resolução de cada um dos grupo numa nova página.
- Realize sempre em primeiro lugar os cálculos analíticos e só no final substitua pelos valores numéricos.
- Identifique o teste que está a recuperar claramente na 1ª página da resolução.

Problema 1

Um conjunto de três planos condutores quadrados (a), (b) e (c) de lado ℓ , de pequena espessura, encontram-se colocados perpendicularmente ao eixo dos xx e separados entre si por uma distância d . Os planos encontram-se carregados com uma densidade de carga eléctrica, respectivamente, σ , -2σ e -3σ com $\sigma > 0$. O espaço entre os planos está preenchido com ar. Determine, detalhando os cálculos:

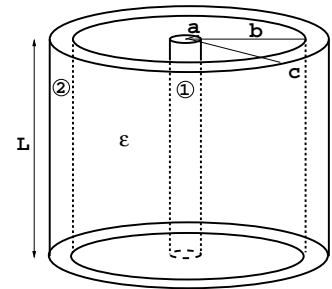


- [1.0] a) o campo eléctrico criado pelo plano (a) na região $x > 0$ e $x < 0$.
- [1.0] b) o campo eléctrico resultante nas regiões ① ($0 < x < d$) e ② ($d < x < 2d$) entre os planos (a) e (c). Indique as direcções dos campos eléctricos criados pelos diferentes planos em cada uma dessas regiões.
- [1.0] c) a densidade de carga existente em cada um dos lados b_1 e b_2 do plano (b).
- [1.0] d) a diferença de potencial entre os planos (a) e (c).
- [1.0] e) a força eléctrica existente sobre o plano (b).



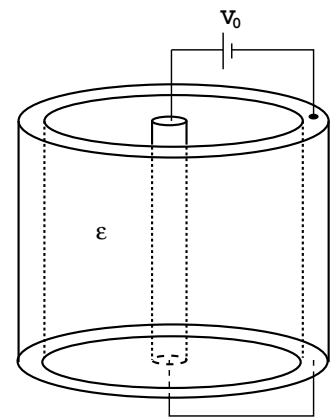
Problema 2

Considere um cabo coaxial de geometria cilíndrica feito de cobre cuja condutividade eléctrica é σ_c . O cabo de comprimento L possui um condutor interior ① de raio a e um condutor exterior ② de raios b e c separados por um material dieléctrico de permitividade eléctrica ϵ . Determine, considerando que $L \gg c$ e detalhando os cálculos:



- [1.0] a) a capacidade do cabo coaxial.
- [1.0] b) a resistência eléctrica de cada um dos condutores que compõem o cabo, para correntes eléctricas ao longo do cabo, R_1 e R_2 .

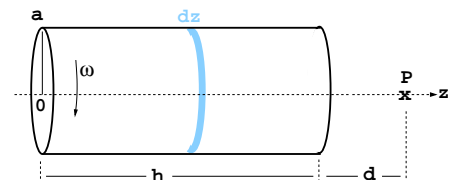
Os condutores do cabo coaxial ligam-se agora numa das extremidades, tal como se mostra na figura, a uma bateria cuja diferença de potencial é V_0 e na outra extremidade por um condutor perfeito, formando assim um circuito fechado. Determine:



- [1.0] c) a diferença de potencial entre as extremidades de cada um dos condutores, V_1 e V_2 .
- [1.0] d) a diferença de potencial entre os dois condutores a meio comprimento, $L/2$.
- [1.0] e) a densidade de carga eléctrica armazenada nos condutores a meio comprimento $L/2$, λ_1 e λ_2 .

Problema 3

Uma folha cilíndrica de espessura desprezável feita de material isolante de raio a e comprimento h , possui carga eléctrica espalhada uniformemente com densidade σ [C/m²] e encontra-se a rodar com velocidade angular ω [rad/s].



- [1.0] a) Determine a densidade de corrente eléctrica, \vec{J} , a corrente que circula numa espira infinitesimal de largura dz , dI , e a corrente eléctrica total existente no cilindro, I .
- [1.0] b) O campo magnético \vec{B} no ponto P no eixo do cilindro a uma distância d da sua extremidade pode escrito como $\vec{B} = K_0 I \vec{e}_z$. Determine a expressão para K_0 .
Sugestão: comece por calcular o campo criado por uma espira infinitesimal de largura dz .

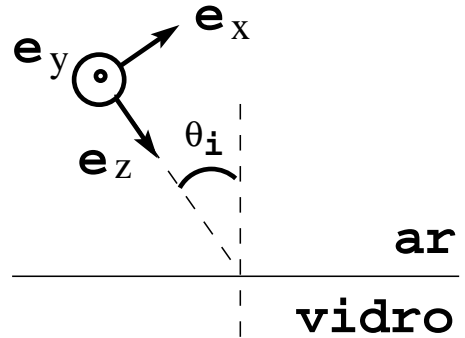
Admita agora que colocava um enrolamento de raio $b \ll a$, N_2 espiras, comprimento $h_2 \gg b$ e com um núcleo de ferrite ($\mu \gg \mu_0$) no ponto P , ligado a uma resistência R . Determine:



- [1.0] c) o coeficiente de auto-indução L_2 do enrolamento.
- [1.0] d) o coeficiente de indução mútua M_2 do sistema enrolamento-cilindro.
- [1.0] e) Se a velocidade de rotação do cilindro variar de acordo com $\omega = \omega_0 t$, escreva a equação diferencial que descreve a corrente eléctrica I_2 do circuito.

Problema 4

Considere uma luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 600 \text{ nm}$ produzida por um laser de He-Ne. Sabendo que a onda está polarizada circularmente, que se propaga no ar segundo zz (ver figura) e que tem uma amplitude $E = 10^{-3} \text{ V/m}$:



- [1.5] a) Escreva as equações que descrevem o campo elétrico, \vec{E} .
- [0.5] b) Diga, justificando, que tipo de polarização circular escolheu.
- [1.0] c) Escreva as equações que descrevem o campo magnético, \vec{B} .
- [1.0] d) Determine a intensidade do laser.
- [1.0] e) A luz do laser incide com o ângulo de Brewster sobre a superfície de um vidro que tem um índice de refração $n = \sqrt{3}$. Determine nestas condições, a reflectância e a transmitância.

ang	cos	sen
0°	1	0
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left(\frac{E_R}{E_I}\right)_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}$$

$$\left(\frac{E_T}{E_I}\right)_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}$$

$$\left(\frac{E_R}{E_I}\right)_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

$$\left(\frac{E_T}{E_I}\right)_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$
 $\nabla \times \vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho_{liv} dv$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS = - \int_V \rho_{pol} dv$
 $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$
 $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}$
- $\phi_P = \int_P^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$
 $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}$
 $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_E) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[\frac{1}{2} \right] \sum_i q_i \phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$
 $U_E = \int_V u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_E}{ds} \vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
- $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$
- $\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dv$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E} \times \frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_{\Gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{u}_r}{r^2}$
 $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ H/m}$
- $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$
- $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$
 $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_M \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$
 $\vec{J}'_M = \vec{M} \times \vec{n}_{ext}$

Interação de partículas e campos

- $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Campos variáveis e indução

- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$
- $U_M = \left[\frac{1}{2} \right] \sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$
 $U_M = \int_V u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_M}{ds} \vec{u}_s$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Óptica

- $n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$
- $\text{tg}\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$
interferência entre fendas
- $d \text{sen}\theta_{max} = m\lambda$
- $d \text{sen}\theta_{min} = m\lambda + \frac{\lambda}{m}$ ($m' \leq N$ e par)
- difracção
- $a \text{sen}\theta_{min} = m\lambda$

Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = \frac{1}{b} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + b}} = \sqrt{x^2 + b}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + b})$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{x+a}\right)$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: <http://integrals.wolfram.com>

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$dS = dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z)$$

Coordenadas polares (r, θ)

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$dS = r dr d\theta$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$dV = r dr d\theta dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

Coordenadas esféricas (r, θ, φ)

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{u}_\phi$$

$$dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial (\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial (\sin\theta A_\theta)}{\partial \phi} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\phi$$

Teorema da Divergência

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Teorema da Stokes

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Identidades vectoriais

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$