Mestrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores (MEEC)
Electromagnetismo e Óptica
2^o semestre de 2012-13

Exame

26 de Junho de 2013: 18H30

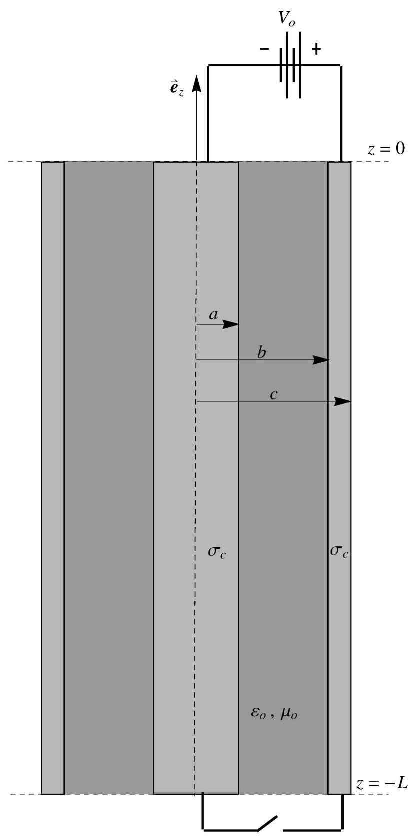
Duração do teste: 2H30

Prof. Fernando Barão (Responsável)
Prof. Amaro Rica da Silva
Ass. Frederico Francisco
Ass. Rafael Henriques

Avisos:

- Durante a realização do teste/exame não é permitido o uso de telemóveis e calculadoras.
- Identifique claramente todas as folhas do exame.
- Inicie a resolução de cada um dos grupos numa nova página.
- Realize sempre em primeiro lugar os cálculos analíticos e só no final substitua pelos valores numéricos.

Problema 1: Um cabo coaxial cilíndrico de comprimento L está ligado (em circuito aberto) a uma bateria com tensão V_o como indicado na figura ao lado. O raio do condutor interior é a, e a malha condutora cilíndrica tem raios interior b e exterior c. O espaço entre os condutores interior e exterior está vazio (ar). Considerando o comprimento do cabo $L \gg a, b, c$, determine:



[1.5] **a)** a expressão do campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ no espaço entre os condutores e dentro destes.

[1.0] **b)** a carga eléctrica existente no condutor interior e na malha condutora do cabo coaxial e a sua localização. Justifique a resposta.

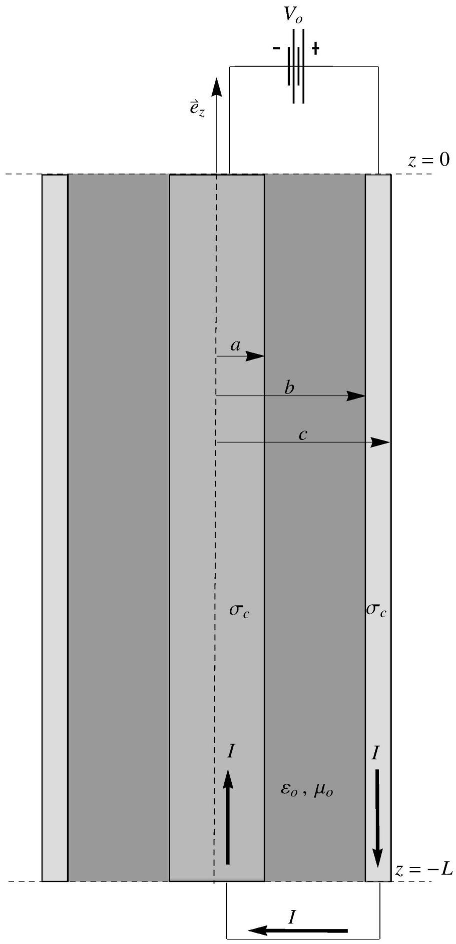
[1.0] **c)** a capacidade C do cabo coaxial e a energia aí armazenada.

Admita de seguida que o espaço entre os condutores do cabo coaxial está preenchido com um dielétrico perfeito de permitividade $\varepsilon > \varepsilon_o$. Determine:

[1.0] **d)** as densidades de carga livre nas superfícies dos condutores, $\sigma(a)$ e $\sigma(b)$.

[1.5] **e)** as densidades de carga de polarização $\sigma_{pol}(a)$, $\sigma_{pol}(b)$ nas superfícies, e $\rho_{pol}(r)$ dentro do dielétrico.

Problema 2: Um cabo coaxial cilíndrico idêntico ao do problema anterior de comprimento L e raios a, b e c está ligado a uma bateria com tensão V_o como indicado na figura ao lado, encontrando-se agora o circuito fechado. O cabo transporta uma corrente estacionária I para baixo na malha condutora exterior, e uma corrente de retorno igual I para cima no condutor interior, estando a corrente eléctrica uniformemente distribuida nos condutores. Ambos os condutores (interior e malha) possuem condutividade eléctrica σ_c, a mesma resistência eléctrica R e estão separados por ar.



[1.0] **a)** Determine o campo elétrico $\vec{E}$ e a densidade de corrente eléctrica $\vec{J}$ no interior dos condutores.

[1.0] **b)** Determine a resistência R do condutor interior (em função de σ_c e das dimensões do cabo).

[1.0] **c)** Determine o potencial eléctrico φ no interior dos condutores.

Use $\varphi(a,-L) = \varphi(b,-L) = 0$.

[1.5] **d)** No espaço entre os condutores ($r \in [a,b]$) o potencial elétrico, em coordenadas cilíndricas, é dado por:

$$\varphi(r,z) = (\alpha\, z + \beta)\; log\left(\frac{r}{\gamma}\right)$$

Determine a expressão do campo elétrico $\vec{E}$ nessa região.

Mostre que $\alpha = \frac{2RI}{\log\left(\frac{b}{a}\right)}$, $\beta = L\,\alpha$ e $\gamma = \sqrt{a\,b}$.

Sugestão: Use a continuidade do potencial e das componentes tangenciais de $\vec{E}$ na transição dos condutores para o ar.

Sabendo agora que os condutores eléctricos possuem uma permeabilidade magnética μ, determine:

[1.5] **e)** o campo magnético $\vec{B}$ em todas as regiões do espaço longe das extremidades (dentro e fora dos condutores desde que $r \ll L$).

[1.0] **f)** a energia magnética armazenada pelo condutor interior de raio a e a partir daí o coeficiente de auto-indução do condutor interior.

[1.0] **g)** o fluxo do vector de Poynting $\vec{S}$, que atravessa a superfície do condutor interior, $r = a$, de fora para dentro. Interprete o resultado.

[1.0] **h)** a magnetização $\vec{M}$ dentro dos condutores e as correntes de magnetização $\vec{J}_M$ em volume, e $\vec{J}'_M$ em superfície para $r = a$ e $r = b$.

Problema 3: Uma onda electromagnética plana, monocromática e sinusoisal propaga-se no vácuo e possui um campo eléctrico dado pela expressão:

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega\, t + 2x - 2y + z\right) \left(\frac{a\, \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{a^2 + 2}} \right) \;\; [V/m]$$

[1.0] **a)** Determine o vector de ondas $\vec{\kappa}$ e o seu módulo.

[0.5] **b)** Calcule o comprimento de onda, λ.

[0.5] **c)** Calcule a frequência angular da onda, ω.

[1.0] **d)** Determine a constante a existente na expressão do campo eléctrico.

[1.0] **e)** Determine o valor de E_0, sabendo que a intensidade da onda é de $I = \langle |\vec{S}| \rangle = \varepsilon_0\, c \;\; \left[W/m^2\right]$.

[1.0] **f)** Determine o campo magnético $\vec{B}$ da onda (direcção e amplitude).

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times 10^9 N.m^2.C^{-2}$
- $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$
  $\nabla \times \vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS = \int_V \rho_{liv}\, dv$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P}\cdot\vec{n}\, dS = -\int_V \rho_{pol} dv$
  $\rho_{pol} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$
  $\sigma_{pol} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{ext}$
- $\phi_P = \int_P^{Ref} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$
  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E}$
  $\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi_E)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[\frac{1}{2}\right]\sum_i q_i\,\phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$
  $U_E = \int_V u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm\frac{dU_E}{ds}\vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c\vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS$
- $p = \vec{J}\cdot\vec{E}$
- $\oint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dv$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E}\times\frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \left\langle \vec{S}\cdot\vec{n}\right\rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_\Gamma \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\vec{u}_r}{r^2}$
  $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} H/m$
- $d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}$
- $\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS = 0$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
- $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M}+\vec{H})$
  $\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$
- $\oint_\Gamma \vec{M}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_M\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{J}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M}$
  $\vec{J}'_M = \vec{M}\times\vec{n}_{ext}$

Interacção de partículas e campos

- $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Campos variáveis e indução

- $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$
- $U_M = \left[\frac{1}{2}\right]\sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$
  $U_M = \int_V u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm\frac{dU_M}{ds}\vec{u}_s$
- $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Óptica

- $n_1 sen\theta_1 = n_2 sen\theta_2$
- $tg\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$
  interferência entre fendas
- $dsen\theta_{max} = m\lambda$
- $dsen\theta_{min} = m\lambda + \frac{\lambda}{m'}$ (m$'$ $\leq N$ e par)
  difracção
- $asen\theta_{min} = m\lambda$

Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{(x^2+b)^{3/2}} = \frac{1}{b}\frac{x}{\sqrt{x^2+b}} \qquad \int \frac{xdx}{(x^2+b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+b}} = \sqrt{x^2+b} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+b}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a}\ln(\frac{x}{x+a})$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: http://integrals.wolfram.com

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$d\vec{\ell} = dx\,\vec{u}_x \;+\; dy\,\vec{u}_y + \; dz\,\vec{u}_z$$
$$dS = dx\,dy$$
$$dV = dx\,dy\,dz$$
$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(A_x, A_y, A_z)$$

Coordenadas polares (r, θ)

$$d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$
$$dS = r\,dr\,d\theta$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z$$
$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$
$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\,sen\theta\,d\phi\,\vec{u}_\phi$$
$$dV = r^2\,dr\,sen\theta\,d\theta\,d\phi$$
$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta A_\theta\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(A_\phi\right)$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left[\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial(sen\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(sen\theta A_\theta)}{\partial \phi}\right]\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\vec{u}_\phi$$

Teorema da Divergência

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$$

Teorema da Stokes

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{A}\;\cdot\;d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$$

Identidades vectoriais

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$